ISSN 2303-5366
[***http://www.bijeljinamc.org***](http://www.bijeljinamc.org)

БМЧ
Бијељински методички часопис
Вол. 2(2015), *7-13*

DUVALOV KOGNITIVNI MODEL GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

Snježana Jovičić

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Pedagoški fakultet Bijeljina,
76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b, B&H
e-mail: snjezanajovicic@hotmail.com

Sažetak: Da bismo razumjeli poteškoće koje mnogi učenici imaju s razumijevanjem matematike, moramo odrediti kognitivno funkcionisanje različitih matematičkih procesa. Predstavljanje i vizuelizacija su u osnovi razumijevanja u matematici. Svrha ovoh rada je da pruži nešto puniji opis Duvalovog kognitivnog modela geometrijskog mišljenja, oslanjajući se na Pijažeovu teoriju kognitivnog razvoja. Naglašavamo da je semiotička reprezentacija najvažnija za bilo koju matematičkoj aktivnosti, pa i za aktivnosti u oblasti geometrijskog mišljenja. Postoje tri grupe semiotičkih reprezentacija: materijalna, nacrtna i govorna. Duval ističe četiri tipa kognitivnog razumijevanja: perceptualno, sekvencijalno, govorno i operativno. U okviru geometrijskog rezonovanja postoje tri vrste kognitivnih procesa: vizuelizacija, konstrukcija i rezonovanje. Odnos između navedenih procesa je prikazan shemom (slika 1).

Ključne riječi i fraze: geometrijsko misljenje, kognitivni proces, semiotička reprezentacija, vizuelizacija

Abstract. To understand the difficulties that many students have with the understanding of mathematics, we must determine the cognitive functioning of different mathematical processes. Presentation and visualization are the basis of understanding in mathematics. The purpose sniff paper is to give a little fuller description Duvalovog cognitive model of geometric thinking, relying on Piaget's theory of cognitive development. We emphasize that the semiotic representation of the most important in any mathematical activities, including the activities in the field of geometric thinking. There are three groups of semiotic representation: material, descriptive and verbal representations. Duval highlights four types of cognitive understanding: perceptual, sequentially, voice and operational understanding. In the framework of geometrical reasoning, there are three kinds of cognitive processes: visualization, construction and reasoning. The relationship between the above process is shown in Scheme (Figure 1).

Key words and phrases: geometric reasoning, cognitive process, semiotic representation, visualization

Math. Subj. Classification (2010): **96G50**
ZDM Subject Classification (2010): **G10, G80**

1. Uvod

U proteklih pedeset godina matematičko obrazovanje je postalo vrlo osjetljivo na promjenu potreba. Istraživanja razvojne psihologije, nove tehnologije, su samo neki od savremenih zahtjeva koji utiču na matematičko obrazovanje. Međutim, njihov uticaj se više odnosi na oblast nastavnog plana i programa, nastavnih sredstava u matematici, nego na objašnjenje dubokih procesa razumijevanja i učenja u matematici. Kako možemo razumjeti poteškoće, često nepremostive koje učenici imaju pri razumijevanju matematike? Šta je priroda tih poteškoća? Gdje se nalaze? Ova pitanja imaju sve veći značaj u nastavi matematike, jer je neophodno pripremiti učenika koji će se suočiti sa tehnološkim i kompjuterskim okruženjem, koje zahtijeva sve veći nivo složenosti. Navedena pitanja postaju obrazovni izazov, kako u učionicama, tako i u teorijskim istraživanjima o razvoju i usvajanju matematičkih znanja. Procesi usvajanja matematičkih znanja su toliko kompleksni, da zahtijevaju više pristupa.

Da bismo razumjeli poteškoće koje mnogi učenici imaju s razumijevanje matematike, moramo odrediti kognitivno funkcionisanje različitih matematičkih procesa (Duval, 1998). Koji su kognitivni sistemi potrebni za pristup matematičkim objektima?

Predstavljanje i vizuelizacija su u osnovi razumijevanja u matematici. Ali, u kom okviru se njihova uloga u matematičkom mišljenju i učenju matematike može analizirati. 1961. godine Piaget je priznao da postoje poteškoće da se razumije ono što matematičari zovu „intuicija“. On razlikuje mnogo formi matematičke intuicije, od empirijskih do simboličkih. Sa kognitivne tačke gledišta pitanje nije lako.

Geometrija, kao jedna njena oblast, je posebno područje u kome postoji dosta problema pri razumijevanju. Geometrija treba da obuhvati razumijevanje različitih vizuelnih pojava, važno je da bude jasno šta se podrazumijeva pod geometrijskim obrazloženjem, i kako takva obrazloženja nastaju. Svrha ovoh rada je da pruži nešto puniji opis Duvalovog kognitivnog modela geometrijskog mišljenja, oslanjajući se na Pijažeovu teoriju kognitivnog razvoja (Piaget, 1947).

2. Pijaže/Inhelder teorija kognitivnog razvoja

U središtu ove teorije (Piaget & Inhelder, 1947) jeste razvoj kognitivnih procesa kod djece kao što su opažanje, pamćenje, mišljenje, mentalne reprezentacije i drugo. Pijažeova teorija kognitivnog razvoja nalazi oslonac u snažnom biološkom uporištu, jer je zasnovana na ideji da biološki činioci određuju moć i granice razvoja i učenja. Ovu teoriju karakterišu četiri stadija kognitivnog razvoja, gdje na svakom stadiju postoje kvalitativne razlike u pogledu dječijeg mišljenja, to su stadij senzomotorne inteligencije, stadij preoperativnog mišljenja, stadij konkretnih operacija i stadij formalnih operacija. Najbitniji za nastavu geometrije su stadij preoperativnog mišljenja i stadij konkretnih operacija.

3. Duvalov kognitivni model

Pojam reprezentacije je karakterističan za sve pojave koje se dešavaju u svakom procesu znanja. Osnovni pojam reprezentacije je vrlo star i precizan. Reprezentacija je „nešto što stoji za nešto drugo”. U isto vrijeme ovaj pojam može biti neshvaćen ili previše formalan. Postavlja se pitanje šta je priroda tog pojma „nešto što stoji za nešto drugo”. Odgovori mogu biti širokog spektra, a zavise od toga da li ih posmatramo u vezi sa konkretnim ličnim iskustvom, sa mentalnim strukturama, ili naprotiv sa znanjem objekata sa njihovim specifičnim epistemiološkim zahtjevima (Hitt, 2002). Zato reprezentacije mogu biti lična vjerovanja, koncepcije ili zablude o kojima saznajemo na osnovu verbalne ili shematske produkcije. Ali reprezentacije mogu biti i udružene, proizvedene u skladu sa pravilima koja omogućavaju opis sistema. Takve semiotičke reprezentacije, na bilo kom jeziku, pojavljuju se kao zajednički alat za proizvodnju novih znanja. Ovaj odgovor, zajedno sa epistemiološkim i matematičkim zahtjevima je imao veliki značaj u istraživanju kognitivnih procesa (Duval, 1998).

Istraživanja o učenju matematike moraju biti zasnovanja na onome šta učenici zaista sami mogu. Postavlja se pitanje kako možemo analizirati procese sticanja znanja iz koncepcija učenika i saznati izvore teškoća. Postoji organizovana kognitivna struktura koja čini da su pojedinci u mogućnosti da usvajaju različite vrste znanja i aktivnosti (Duval, 1996). Postoje kognitivni uslovi koji čine shvatanje mogućim. Zato moramo postaviti dva pitanja:

1. Kako kognitivni sistemi omogućavaju pristup matematičkim objektima, i kako izvršavaju višestruke transformacije u predstavljanju matematičkih procesa?
   Obično se pretpostavlja da je način razmišljanja isti u različitim područjima znanja, iako je matematičko znanje više apstraktno, čak iako se određeni jezik ili kodiranja koriste u matematici. Duval smatra da sve zavisi od pristupa učeničke koncepcije na kognitivni pristup, zato postavlja sljedeće pitanje:
2. Da li je način razmišljanja isti u matematici kao i u drugim oblastima znanja? Drugim riječima, da li matematičke aktivnosti zahtijevaju zajedničke kognitivne procese, ili vrlo sprecifične kognitivne strukture, o kojima se mora voditi računa u nastavi?
   Ovo pitanje o učenju matematike je veoma značajno, jer cilj matematike nije dati učenicima alate, već doprinijeti opštem razvoju, analizi i vizuelizaciji. U svakom slučaju potrebno je uzeti u obzir semiotičke reprezentacije na nivou strukture uma, a ne samo u pogledu epistemioloških uslova za dobijanje pristupa objektima znanja (Duval, 1995a). Čini se da opozicija između mentalne i semiotičke reprezentacije više nije relevantna, jer počiva na konfuziji između fenomenološkog načina proizvodnje i vrste sistema mobilisanog za proizvodnju bilo kakvog predstavljanja (Duval, 2000).

Naglašavamo da je semiotička reprezentacija najvažnija za bilo koju matematičku aktivnost, pa i za aktivnosti u oblasti geometrijskog mišljenja.

3. 1. Semiotička reprezentacija

Semiotički[1] prilazi u didaktici geometrije postoje već dugo vremena. Široko posmatrajući, semiotički prilazi mogli bi dati bogat pogled na razne osobine objekata koji se upotrebljavaju u geometriji, i oni mogu biti viđeni kao podrška izgrađivanju znanja, opisivanju objekata ali i samoj percepciji. Naime, figura u geometriji bilo da je dvodimenzionalna ili trodimenzionalna može biti predstavljena na razne načine, tako da možemo razlikovati tri grupe semiotičkih reprezentacija:

- materijalna reprezentacija (predstavljanje) figure (figura izgrađena od papira, plastelina, kartona itd.),
- nacrtna reprezentacija (slika, crtež na papiru, ali i na računaru, geometrijski softver),
- diskurzivna (govorna) reprezentacija opisujemo figuru pomoću prirodnog i formalnog jezika zajedno.

Francuski psiholog Rajmond Duval najviše se bavio registrima semiotičkih reprezentacija i kognitivnih procesa. Semiotička reprezentacija je proizvod koji je napravljen tako da koristi obilježja koja pripadaju sistemu reprezentacija pri čemu ima vlastita ograničenja razumijevanja i funkcionisanja (Duval, 1995). Same semiotičke reprezentacije su neophodne u nastavi geometrije, s obzirom da se neki geometrijski objekti ne mogu direktno uočavati, nego se moraju predstavljati.

[1] Semiotika (grč. semeiotikos: koji se obazire na znakove) jeste teorija o znakovima i simbolima, odnosno poučavanju načina na koji funkcionišu znakovni sistemi. Upotrebom znakova, upućuje se, navodi na nešto drugo. Posebno se bavi znakovima, odnosima između logike i jezika, međuodnosima raznih znakova i odnosima između znakova, te njihovim značenjjskim sadržajima. Semiotika zahtijeva poznavanje različitih lingvističkih, filozofskih i logičkih sistema.

Duval prilazi geometriji sa kognitivne i perceptualne tačke gledišta, on objedinjuje analitički izvor u obliku detaljnog rada za analiziranje semiotike geometrijskog crteža. U ovom radu on ističe četiri tipa takozvanih "kognitivnih razumijevanja". To su:

- perceptualno razumijevanje: odnosi se šta učenik prepozna na prvi pogled, npr. prepoznavanje formi objekata koji su relevantni za konstrukciju geometrijskih figura,
- sekvencijalno razumijevanje: ova vrsta "kognitivnog razumijevanja" upotrijebljena je kada se konstruiše forma ili kada se opisuje njena konstrukcija. U ovom slučaju, figuralne jedinice ne zavise od percepcije nego od matematičkih i tehničkih instumenata (trougao, lenjir, šestar ili kompjuterski softver),
- diskurzivno(govorno) razumijevanje: perceptualno razumijevanje od korištenja govora iz razloga što matematička svojstva predstavljena na crtežu ne mogu biti određena jedino kroz perceptualno razumijevanje, neka moraju biti data kroz govor,
- operativno razumijevanje: ova vrsta "kognitivnog razumijevanja" uključuje operacije sa figurama, ili mentalno ili fizički, koje mogu dati uvid u rješenje problema.

Semiotičke reprezentacije su neophodne u matematičkim aktivnostima, budući da se matematički objekti ne mogu direktno uočavati, i prema tome moraju se predstavljati. Semiotičke reprezentacije nisu samo ispoljavanje mentalnih reprezentacija u komunikaciji već imaju i neka suštinska svojstva za kognitivne aktivnosti mišljenja (Duval, 1998). On razlikuje *semiosis* – sažimanje ili proizvodnja mentalnih reprezentacija, od *poesis* – konceptualno sažimanje nekog objekta što održava njihovu neodjeljivu bitnost. U kognitivne aktivnosti on navodi tri tipa aktivnosti:

- formiranje reprezentacija, koje mogu biti identifikovane kao sadržaj datih registara,
- procesuiranje i transformacija reprezentacija unutar registara u kojima su kreirane,
- konverzija, odnosno transformacija semiotičkih reprezentacija iz jednog registra u drugi.

3.2. Vizuelizacija, konstrukcija, rezonovanje

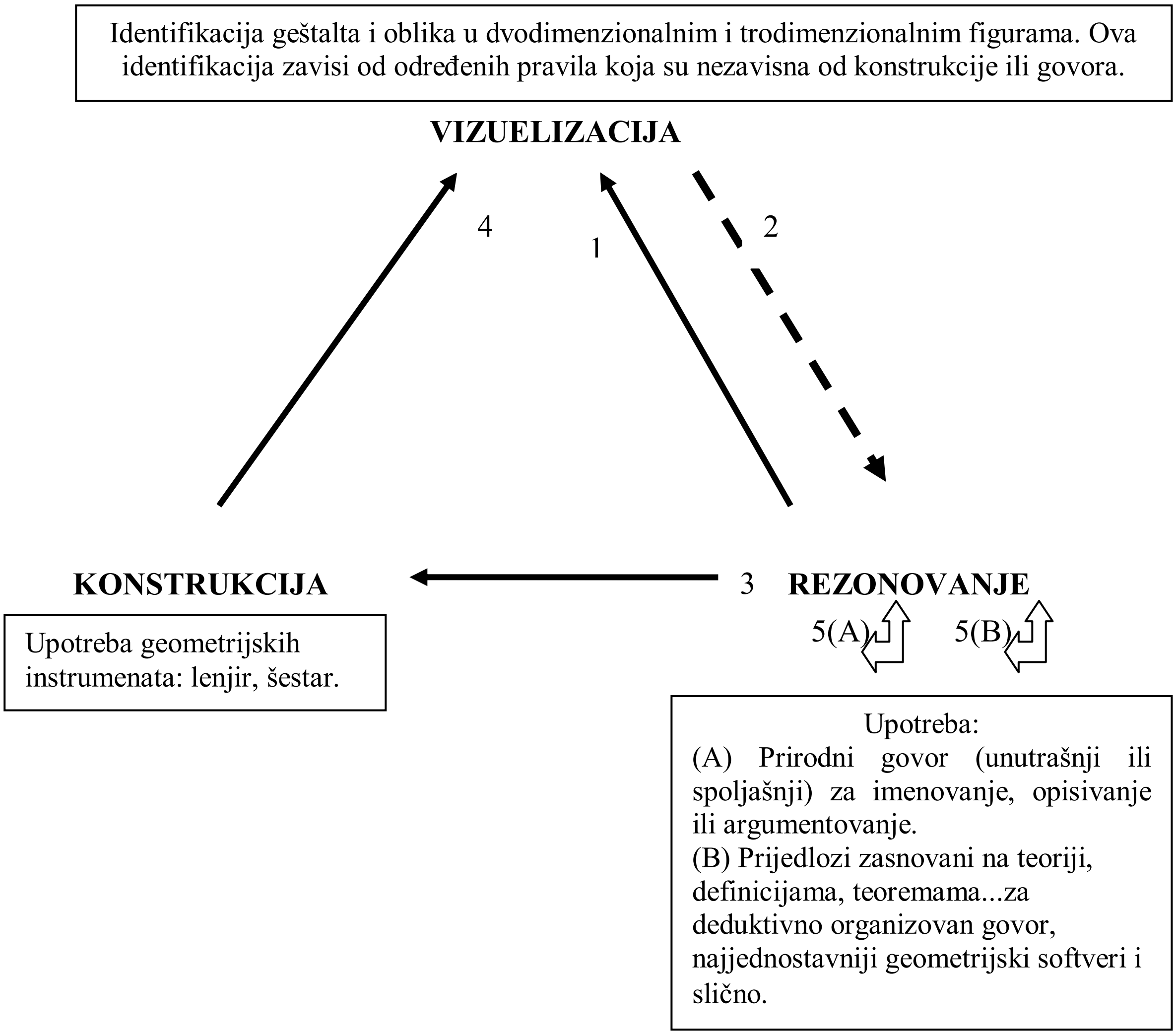
Duval ističe da uvijek postoji mogući sukob između perceptualnog razumijevanja figure i matematičke percepcije, poteškoće u pomjeranju sa perceptivnih činjenica figure mogu zbuniti učenike sa matematičkim svojstvima i objektima predstavljenim na crtežu, te mogu ometati razumijevanje potrebe za pronalaženjem dokaza. Prema mišljenju Duvala, operativno razumijevanje ne funkcioniše samostalno od drugih, on ističe da diskurzivno i perceptualno razumijevanje mogu da veoma često "prikriju" operativno razumijevanje. Sve ovo se odnosi na geometrijske crteže.

Duval ide dalje u analizu geometrijskog rezonovanja i uključuje tri vrste kognitivnih procesa koji su ispunjeni posebnim epistemiološkim funkcijama. Ovi kognitivni procesi su:

- Proces vizuelizacije (na primjer, vizuelna reprezentacija geometrijskih iskaza, ili heurističko iskazivanje složenih geometrijskih situacija),
- Proces konstrukcije (upotreba geometrijskih instrumenata),
- Proces rezonovanja (naročito diskurzivni process za širenje znanja, za objašnjavanje, dokazivanje i drugo).

Duval, ističe da različiti procesi mogu biti odvojeni. Na primjer, vizuelizacija nije neophodna za konstrukciju, prema tome, čak iako konstrukcija vodi ka vizuelizaciji, process konstrukcije ipak zavisi jedino od veze između relevantnih matematičkih svojstava i ograničenja instrumenata koji se upotrebljavaju. Dakle, čak iako vizuelizacija pomaže u pronalaženju dokaza, u nekim slučajevima ona može voditi i do zabune. Međutim, Duval navodi da su ove tri vrste kognitivnih procesa blisko povezane i njihova sinergija je kognitivno neophodna za spretnost i znanje u geometriji.

Na slici 1. prikazano je kako Duval ilustruje vezu između ove tri vrste kognitivnih procesa.



Slika 1. Osnovna kognitivna interakcija koja je uključena u geometrijsku aktivnost.

(Preuzeto iz Keith Jones, 1998: Providing a foundation for deductive reasoning)

Na slici 1. svaka strelica predstavlja put jedne vrste kognitivnog procesa koji može da podrži drugu vrstu u bilo kojoj geometrijskoj aktivnosti. Kao što se vidi na slici Duval je prikazao dvije uzajamne strelice (jedna isprekidana) između vizuelizacije, rezonovanja, ono o čemu smo govorili o tekstu iznad, što znači da vizuelizacija ne pomaže uvijek rezonovanju (zato je isprekidana). Strelice 5(A) i 5(B) ilustruju da se rezonovanje može razviti na način koji je nezavisan od procesa konstrukcije ili procesa vizuelizacije.

Prikazana slika predstavlja sinergiju ove tri vrste kognitivnih procesa, koji su prema mišljenju Duvala kognitivno neophodne za spretnost i znanje u geometriji, i predstavljene su, prema mišljenju Duvala, kako učenik u školi vidi vezu između ove tri vrste kognitivnih procesa. Duvalova dalja istraživanja u pokušaju da se razumije razvoj geometrijskog rezonovanja ističe sljedece:

- Sve tri vrste kognitivnog procesa moraju biti razvijene odvojeno.
- Rad na diferencijaciji procesa vizuelizacije i različitim procesima rezonovanja je neophodan u nastavnom planu i programu.
- Koordinacija sva tri ova procesa jedino se javlja poslija rada diferencijacijama.

4. Zaključak

Ako se analiziraju matematičke aktivnosti sa stanovišta kognitivnih procesa, zapažaju se sljedeće specifičnosti: matematički objekti prolaze kroz transformaciju semiotičke reprezentacije, koja uključuje korištenje nekih semiotičkih sistema. Matematička aktivnost ima dvije strane. Vidljiva strana je jedan od matematičkih objekata i ima važeće procese koji se koriste za rješavanje određenog problema, dok je skrivena strana presudna za kognitivne operacije. Ne postoji direktan pristup matematičkim objektima, već preko svoje reprezentacije. Koristeći semiotičku reprezentaciju moramo aktivirati registre reprezentacija**.**

Navedeni rad predstavlja okvire za opisivanje i razumijevanje razvoja geometrijskog rezonovanja, predstavlja kratku ideju o teorijskim resursima koji mogu biti korisni za instraživanja u ovoj oblasti. Navedene su kognitivne kompleksnosti geometrije, odnosno tri vrste kognitivnih procesa od kojih zavisi spretnost i znanje iz oblasti geometrije (Duval, 1998). Ipak, mnoga istraživanja o dubokom procesu razvoja i učenja vizuelizacijom i rezonovanjem su i dalje potrebna (Duval, 2000).

Literatura:

[1] Brousseau, G. (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (1970-1990). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[2] Chartier, G. (2002). Using “geometrical intuition” to learn linear algebra. *Proceedings of CERME 2*, 533-541. Prague: Charles University.

[3] Clements, D. H. i Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A Grouws, (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 420-464, New York: Macmillan.

[4] Duval, R. (1983). L’obstacle du d´edoublement des objets math´ematiques. *Educational Studies in Mathematics,* 14(4), 385–414.

[5] Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing. *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, pp.142-157. Berlin.

[6] Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point a view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* pp.37-52. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[7] Duval, R. (2000a). Basic issues for research in mathematics education. *Proceedings of the 24th Conference of PME, 1, pp. 55-69.*

[8] Duval, R. (2000b). Ecriture, raisonnement et d´ecouverte de la d´emonstration en math´ematiques. *Recherches en Didactique des Math´ematiques* 20(2), 135–170.

[9] Fischbein, E (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), 139-162. Kluwer Academic Publishers.

[10] Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics Visualization.* North American Chapter of IGPME. Mexico: Cinvestav-IPN.

[11] Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 16(3), 289-322. Grenoble: La Pensée Sauvage.

[12] Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l’étude de l’enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40, 283-312. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[13] Houdement, C. & Kuzniak, A. (2002). Entre géométrie et mesure : le jeu de l’approximation. *Actes de la XIème Ecole d’été de Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

[14] Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. *Proceedings of CERME 3,* pp 1-10.

[15] Kuzniak, A. & Houdement, C. (2002). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in geometry. *Proceedings of CERME 2*, 292-304. Prague: Charles University.
[16] Kuzniak, A. & Rauscher, J. C.(2005). On the geometrical thinking of pre-service school teachers. *CERME 4,* 738-748.
[17] Kuzniak, A., Gagatsis, A., Ludwig, M. & Marchini, C. (2007). From geometrical thinking to geometrical work. *CERME 5*, 955-962.
[18] Lemonidis, C. (1993). Influence of the typical representation on the behaviour of the student. Examples from geometry. *Presentation at the 4o Panhellenic Congress Psychological Research*. 27-30.
[19] Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Berlin: Springer
[20] Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. Education Studies in Matematics. 19(3). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
[21] Piaget, J., Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'éspace chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaire de France.
[22] Piaget, J., Inhelder, B. (1960). *Child's Conception of Space*. London: Routledge and Kegan Paul.
[23] Piaget, J., Inhelder, B.(1969). *Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde.* Stuttgart: Klett.
[24] Piaget, J. (1972/73). *Die Entwicklung des Erkennens*. 3 Bände. Stuttgart: Klett.
[25] Piaget, J., Inhelder, B. (1975). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
[26] Romano, D. A. (2009). Istraživanje matematičkog obrazovanja. *IMO, broj* 1, 1-10.
[27] Romano, D. A. (2009). O geometrijskom mišljenju. *Nastava matematike*, LIV (2-3), 1-11.
[28] Rouandi, N. & Husni, N. (2014). Demonstration in Euclidean Geometry. *American International Journal of Social Science, Vol. 3 No. 1.* North Lebanon: University of Balamand.
[29] Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using Geometric Knowledge. *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 225-264.
[30] Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Academic Press 1986. USA: Orlando.