ISSN 2303-5366
БМЧ
[*http://www.bijeljinamc.org*](http://www.bijeljinamc.org)
Бијељински методички часопис
Вол. 2(2015), 1-6

Препознавање концептуалног, процесног и процедуралног знања о скуповно-теоријској релацији посредством *RBC* + *C* теорије апстракције

Даниел А. Романо
Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет Бијељина,
76300 Бијељина, Семберских ратара б.б., Б&X
e-mail: bato49@hotmail.com

Сажетак. У овом раду анализирајући резултате тестирања студената два техничка факултета Универзитета у Бањој Луци покушавамо установити концептуална, процесна и процедурална знања посредством конструисања математичког скуповно-теоријског концепта релације ослањајући се на компоненте *RBC* + *C* теорије апстракције.

Кључне ријечи и фразе: *RBC* + *C* теорије апстракције, релација

Abstract. In this paper, by analyzing the test results of students of two technical faculties of the University of Banja Luka trying to establish conceptual, processual and procedural knowledge by means of constructing the mathematics-theoretical concept of relations relying on components *RBC* + *C* theory of abstraction.

Key words and phrases: *RBC* + *C* theory of abstraction, relation

Mathематицс Subject Classification (2010): **97C30, 97E60**
Didactic Subject Classification (2010): **C30, E60**

Увод

Не постоји јединствена истраживачка парадигма математичког образовања – генерално прихваћен је став унутар заједнице истраживача математичког образовања. Процјењује се да је то један од разлога за појављивање и опстанак значајног броја теорија математичког образовања али и знатног броја специфичних термина у тим теоријама. У многим од њих настоје се понудити прихватљива објашњења за изградњу структура математичких знања. Иако су те теорије у много чему различите, оне имају један заједнички циљ: свака од њих покушава понудити опис процеса посредством којих се изграђују структуре новог математичког знања. Према томе, требало би да свака од њих има могућност да направи увид у бар један аспект учења математике. На 26. конференцији Међународне групе за психологију математичког образовања (26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, England, July 21-26, 2002) расправљало се, између осталог, о математичкој апстракцији. Анализиране су три теорије апстракције:

- Еди Греј и Дејвид Тол (Eddie Gray and Dabid Tall): *Апстракција као један природан процес менталног сажимања,*

- Барух Шварц, Рина Хершкович и Томи Драјфус (Baruch Schwartz, Rina Hershkowitz and Tommy Dreyfus): *RBC модел апстракције*,
- Куен Грејвмајер (Koeno Gravemeijer): *Модел настајуће апстракције*.

Међутим, при томе није узет у обзир још једно значење апстракције за које се вјерује да је важно у подучавању и учењу математике: Формирање концепата посредством емпиријских апстракција унутар физикалних и/или социјалних окружења. Многи истраживачи математичког образовања износе своја увјерења да се многе фундаменталне математичке идеје формализују таквим концептима (погледати, на примјер, текст (Mitchelmore and White, 2004). Сем тога, прави се дистинкција између апстракција у математици и апстракција у учењу и подучавању математике.

Наш циљ у овом тексту је упоређивање конструисања апстракције у математици са емпиријском апстракцијом у математичком образовању на примјеру увођења концепта математичког скуповно-теоријског појма релације.

У многим земљама у којима је математичко образовање популације важно, примјењује се конструктивистички приступ у математичком образовању (на примјер, унутар 'Теорије дидактичких ситуација' или 'Теорије реалистичког математичког образовања'). Овај приступ је заснован на принципима:

Принцип 1: Знање се не добија пасивно, већ у његовој изградњи учествује и особа која учи;
Принцип 2: Функција сазнања је прилагодљива и односи се на организацију искуственог свијета;
Принцип 3: Субјект који сазнаје не само да конструише своје властито знање већ то ради на својствен начин.

Како математички објекти не постоје у реалности већ су производ људског духа, конструисање математичких знања засновано је на људској способности апстракције. *RBC* (Recognizing-Building with-Constructing) *модел апстракције* наглашава потребу и стимулацију у процесу апстракције. Активности унутар ове теорије су: Препознавање (*recognizing*), кориштење алата (*building with*) и конструкција (*construction*). Апстракција, један од основних појмова који се користе у овој студији, дефинисан је на једноставан начин као "процес преласка са *препознатљивог* до *апстрактног*" (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus; 2001). Три поменуте епистемиолошке активниости ћемо додатно објаснити:

Препознавање је употреба претходно формиране структуре. Дакле, под 'препознавањем' познате математичке структуре, у мисаоном смислу настаје када ум онога који сазнаје сусретне, идентификује и разумије (у цјелини али и по дијеловима) ову структуру у математичком контексту у коме се тај уме креће (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus; 2001).

У процесу *'кориштење елемената и алата'* ученички / студентски ум још увијек није обогаћен новим комплекснијим знањима већ се користи постојећим знањем да разумије и разријеши нову парадигму унутар математичког концепта у којем се креће трагајући за новим сазнањима (Schwarz, Dreyfus, Hads, Hershkowitz, 2004).

Процес *'конструисање'*, такође познат као поновно (пре)уређење надограђивањем, је процес изградње нових знања. То је процес којим се постојеће компоненте математичког знања евентуално допуњују новим компонентама, на нови начин међусобно уређују успостављајући комплексније уређење у претходној решетки сазнања и тако добијају нова значења.

У настојањима да посредством ове *RBC* теорије понуди порпуно прихватљиво образложење у формирању нових структура знања, Томи Драхфус је 2007. године предложио њено проширење процесом '*консолидације*' формирајући тако *RBC + C* теорију апстракције (Dreyfus, 2007).

Сецифичност ове студије је то што испитује процес апстракције код дјелимичне полупације студената прве године два техничких факултета Универзитета у Бањој Луци. Главни циљ студије је да дизајнира окружење у коме студенти могу формирати значајно математичко знање, и да примјени дизајн учење. Даљи циљеви ове студије су да региструју резултате процеса учења, те да се и на тај начин стекне увид у то како квалитет образовања може се побољшати у том погледу. Студија је спроведена са ова три циља на уму.

Веома је тешко да се испита процес формирања математичког знања. Ако је ученик / студент фокусиран на математички субјект и постиже апстракцију, тада он / она користи специјални језик да изрази ту ситуацију (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus; 2001). Сврха студије је да се испита процес којим студент који је завршио четворогодишњу средњу школу стиче математичка умјећа (способности и вјештине) везане за теорисјко-скуповни концепт релације.

Преглед литературе

Многи истраживачи математичког образовања изучавали су процес апстракције у математици. Међу њима треба посебно истачи Рину Хершкович (Rina Hershkowitz, на пр. [2], [3]) Томија Драхфус (Tommy Dreyfus, на примјер [1], [2], [3]), Баруха Шварц (Baruch Schwartz, на пр. [2], [3]), Жан-Пјер Маркуsa (Jean-Pierre Marquis, [4], [5]), Мајкла Мичелмура и Паула Вајта (Michael Mitchelmore and Paul White, [6]-[10]). Мени није познато да је неко истраживао елементе *RBC + C* теорију апстракције на примјеру скуповно-теоријске релације.

Метод

Ово је "case study", и као такав, представља примјер квалитативних истраживања. У дизајнирању овог студудија случаја али и за квалитативне методе истраживања уопште, истраживач није, за разлику од квантитативних метода, само посматрач феномена студија, него и учесник у процесу. То је разлог зашто истраживач у овим ситуацијама се зове *учесник посматрач.* Истраживање је трајало око 45 минута.

Учесници

Ово истраживање је рађено у два одвојена дијела: (1) Испитивањем (06.11.2014.) популације прве године студената Технолошког факултета Универзитета у Бањој Луци (72 студента подијељена у четри групе) и (2) Испитивањем (07.11.2014.) дјелимичне популације прве године студената Машинског факултета истог универзитета (40 студената подијељених у пет група). Подијела у групе је непожељну комуникацију између студената за вријеме тестирања смањила на најмању могућу мјеру.

Инструменти

Материјал који се користи у овој студији је математика тест који се састоји од двије групе по четри дијела у вези са релацијама: Прва група (Задаци 4.1, 4.2 и 4.3): домен релације, ранг релације, инверз релације и производ двије релације; Друга група (Задатак 4.4): Истраживано је разумијевање особина тоталности и функционалности релација по првим, односно по другим координатама. У том циљу кориштени су радни листови.

Задатак 4.1 (Група МФ-Б1, Група ТФ-А1) За релације Id_X и $R = \{(x, \frac{2x-3}{-x-5}): x\in\boldsymbol{R}\}$ одредити: 4.1. Домен; 4.2. Ранг; 4.3. Инверз; и 4.4. $Id_X \circ R$.

Задатак 4.2 (Група МФ-Б3, Група ТФ-А3)
За релације $R = \{(x,2-3x): x\in\boldsymbol{R}\}$ у $S = \{(x, \frac{2x-3}{x+5}): x\in\boldsymbol{R}\}$ одредити: 4.1. S^{-1} . 4.2. R^{-1}. 4.3. $S^{-1} \circ R^{-1}$. 4.2. $(R \circ S)^{-1}$.

Задатак 4.3 (Група МФ-Б 4, Група МФ-Б5, Група ТФ-А4) За релације $R = \{(x, \frac{2x-3}{-x-5}): x\in\boldsymbol{R}\}$ и $S = \{(x, \frac{2x-3}{x+5}): x\in\boldsymbol{R}\}$ одредити: 4.1. Домен; 4.2. Ранг; 4.3. Инверз и 4.4. производе $R^{-1} \circ S$ и $S^{-1} \circ R$.

Задатак 4.4 (Група МФ-Б2, Група ТФ-А2)

За релацију S = $\{(x, \frac{2x-3}{x+5}) : x \in \boldsymbol{R}\}$ испитај да ли је:
4.1. Тотална по првим координатама.
4.2. Тотална по другим координатама.
4.3. Функционална по првим координатама. и
4.4. Функционална по другим координатама.

Легенда:

0. Задаци су вреновани ослањањем на технологују 'дио по дио анализе' ('chunk-by-chunk' analysis) утврђивања студентске успјешности.
1. Ознака ∅ (празан скуп) значи да кандидат није понудио никакве информације као одговор на постављено питање.
2. Ознака 0 (нула) значи да су информације које је кандидат понудио потпуно неприхватљиве као валидан одговор на постављено питање.
3. Задаци вреновани су са могућностима вредновања $\frac{k}{4}$ (k = 1, 2, 3, 4), што значи да је кандидат понудио k од могућих 4 дијела на прихватљив начин.

Налази и анализа налаза

Подаци су анализирани коришћењем дескриптивне анализу. У дескриптивној анализи, прикупљени подаци су приказани и тумаче се у складу са претходно идентификованим темама. Циљ је да прикупљени податци буду репрезентативни и да се репрезентују на уредан и смислен начин. Студија је спроведено у оквиру теорије *RBC+C* што би требало да омогућава постојање епистемиолошких активности 'препознавање', 'кориштење података' и 'изградњу'.

Прикупљени подаци

Успјешност	∅	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Број	19	8	2	0	0	0
Фреквенција	65.52	27.59	6.89			

Табела 1: Дистрибуција одговора на питања Задатка 4.1 (N = 29)

Успјешност	∅	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Број	11	11	0	1	0	0
Фреквенција	47.83	47.83		4.34		

Табела 2: Дистрибуција одговора на питања Задатка 4.2 (N = 23)

Успјешност	∅	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Број	12	8	4	5	2	0
Фреквенција	38.71	25.81	12.9	16.13	6.45	

Табела 3: Дистрибуција одговора на питања Задатка 4.3 (N = 31)

Успјешност	∅	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Број	18	10	1	0	0	0
Фреквенција	62.1	34.48	4.42			

Табела 4: Дистрибуција одговора на питања Задатка 4.4 (N = 29)

Анализа процеса

Погледајмо резултате овог тестирања:

У задацима 4.1. и 4.3. питања су слиједећа: (а) Одредити домен дате реалције; (б) Одредити ранг релације; (в) Одредити инверз релације; и (г) Конструисати производ двије релације. У задатку 4.2. требало је само конструисати инверзе датих релација и за њих конструисати производ. Погледајмо о којим математичким концептима се ради.

Прво, опишимо математичке концепте које претходе увођењу скуповно-теоријског концепта релације. Нека су дати (непразни) скупови X и Y и нека су $x \in X$ и $y \in Y$ по вољи изабрани елементи. Процијењујемо да новоуписани студентзи на поменута два техничка факултета препознају објекте $\{x\}$ једночланог и $\{x, y\}$ двочланог скупа али и концепте који стоје у основи тих објеката. То су већ апстрактни појмови. Конструишимо објект $\{\{x\},\{x, y\}\}$ – скуп који се састоји од објекта $\{x\}$ и објекта $\{x, y\}$. Такав скуп означавамо слиједећим графичким симболом (x,y) и за његово језичко означавање користимо слоган 'уређени пар' елемента x (из скупа X) и елемента y (из скупа Y). То је новоконструисани апстрактан објект који је база за конструисање новог математичког објекта – директног производа скупа X и скупа Y на слиједећи начин: $\{(x,y): x \in X \wedge y \in Y\}$. Графичка ознака $\wedge$ је ознака за логичку коњукцију. Овај теоријски конструкт означавамо симболом $X \times Y$. Према томе, $(x,y) \in X \times Y$ ако и само ако је $x \in X \wedge y \in Y$. Дакле, у процесу конструисања апстрактног математичког концепта скуповне-теоријске релације, под активношћу *'препознавање раније математилчке структуре'* требало би да особе које подучавамо препознају концепт директног производа скупова као цјеловит објект али и конструктивне елементе тог концепта. Према налазима нашег тестирања, 60, или 53.57%, од укупног броја 112 тестираних кандидата није ни покушало да понуди било какве одговоре на постављена питања у задацима. То тумачимо као непрепознавање полазне математичке структутре неопходне за изградњу апстрактног појма релације. Остали кандидати, њих 46.43%, покушало је да понуди одговоре на постављена питања у задацима.

Друго, опишимо концепте који су уско везани са процесом конструисања и разумијевања концепта релације, тј. опишимо шта подразумијевамо под слоганом *'кориштење елемената и алата'* у овом случају. Неке је конструисан директни производ $X \times Y$. Конструкт '*релација* између елемената скупа X и скупа Y ' је било који подскуп R скупа $X \times Y$: $R \subseteq X \times Y$. Дакле, појмови који претоде увођењу појма релација су: уређени пар елемената, директни производ скупова и инклузија али и њихове базне особине. Према налазима тестирања нашег изабраног статистичког скупа, 27, или 24.11%, од укупног броја тестираних кандидата понудило је потпуно неприхватљиве информације као одговоре на постављена питања у задацима. То тумачимо да иако препознају ријеч 'релација' нису у могућности да је доведу у значајну корелацију са појмовима који јој претходе.

Треће, опишимо процес препознавања конструисаног новог знања – знања о концепту релације – посредством препознавања концепата уско везаних за теоријски конструкт релације: препознавања концепата *домена* и *ранга* релације. Ако је $R \subseteq X \times Y$ релација, тада су скупови $\mathcal{D}(R) = \{x \in X : (\exists y \in Y)((x,y) \in R)\}$ и $\mathcal{R}(R) = \{y \in Y : (\exists x \in X)((x,y) \in R)\}$ домен и ранг релације R. Процјењујемо да експонираним умијећем одређивања ових скупова уско везаних за релацију $R \subseteq X \times Y$, тестирани кандидати показују да разумију концепт новоконструисаног апстрактног математичког појма. Према налазима нашег тестирања, само 14 (или 16.87%) од свих 83 тестирана кандидата који су имали обавезу да одговоре на захтијеве конструисања домена и ранга дате релације показало је да располаже умијећем концептног и процесног разумијевања концепта скуповно-теоријске релације.

Четврто. Студенти експонирају потпуно разумијевање концепта релације ако осим концептног и процесног знања у вези са овим објектом / појмом експонирају и процедуралне вјештине рада са релацијама. У том циљу, пред студенте је постављен захтјев да покажу да разумију конструкте 'инверз релације' и 'производ двије релације'. Даље, знање објеката које, процјењујемо, такође омогућавају исказивања увјерења о студентским концептним, процесним и процедуралним знањима су препознавање и разумијевање концепата тоталности функционалности дате релације по првим, односно по другим координатама (Задатак 4.4). Умјесто закључка, описаћемо ове концепте.

За дату релацију $R \subseteq X\times Y$ релација $R^{-1} \subseteq Y\times X$ детерминисана на слиједећи начин $R^{-1} = \{(y,x)\in Y\times X : (y,x)\in R\}$ је њен *инверз*. Без већих потешкоћа се може показати, али докази нису тривијални, да вриједи $\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{R}(R)$ и $\mathcal{R}(R^{-1}) = \mathcal{D}(R)$. Даље, из очигледних односа $\mathcal{D}(R) \subseteq X$ и $\mathcal{R}(R) \subseteq Y$ закључујемо да имамо могућности: (1) Ако је $\mathcal{D}(R) = \emptyset$, тада је $R = \emptyset$; (2) Ако је $\mathcal{D}(R) = X$, тада је R *тотална* релација по првим координатама; (3) Ако је $\mathcal{R}(R) = \emptyset$, тада је $R = \emptyset$; (4) Ако је $\mathcal{R}(R) = Y$, тада је R *тотална* релација по другим координатама.

Коначно, ако су $R \subseteq X\times Y$ и $S \subseteq Y\times Z$ релације, тада релацију конструисану на слиједећи начин $\{(x,z)\in X\times Z: (\exists y\in Y)((x,y)\in R \wedge (y,z)\in S)\}$ назначавамо као *производ* релације R и релације S, и означавамо је графичким симболом $S \circ R$.

У овој анализи нема потребе разговарати о конструктима потраживаним у питањима 4.3 и 4.4 задатка 4.4 будући да ни један од тестираних кандидата није експонирао разумијевање тих концепата.

Од свих тестираних кандидата, њих 112, само је 6 кандидата (или 5.36%) показало разумијевање инверза релације. Ни један од тестираних кандидата није експонирао посједовање вјештине рада са релацијама која се показује разумијевањем концепта производа двије релације.

Дакле, нешто што би се могло третирати као консолидација знања конструисаног апстракцијом ступовно-теоријског концепта релације није било могуће регистровати.

Литература

[1] Dreyfus, T. (2007): *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*, Доступно на адреси: http://escalate.org.il/construction_knowledge/papers/dreyfus.pdf

[2] Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001): *Abstraction in contexts: Epistemic actions*, Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195-222.

[3] Hershkowitz, R, Schwarz, B. B., Dreyfus, T. & Hadas, N. (2004): *Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge",* Mathematics Education Research Journal, Vol. 19, No. 2, 41-68.

[4] Jean-Pierre Marquis, *The abstract method and levels of abstraction in Mathematics*, Доступно на адреси: https://www.academia.edu/6191852/ Stairway_to_Heaven_the_abstract_method_and_levels_of_abstraction_in_mathematics

[5] Jean-Pierre Marquis: *Mathematical abstraction, conceptual variation and identity*. In: P-E Bour; G. Heinzmann; W. Hodges; P. Schroeder-Heister (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceedings of the fourteen international congress, Доступно на адреси: https://www.academia.edu/2615046/Mathematical_Abstraction_Conceptual_Variation_and_Identity

[6] Mitchelmore, M. C., & White, P (1995): *Abstraction in mathematics: Conflict, resolution and application*. Mathematics Education Research Journal, 7(1), 50-68.

[7] Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000): *Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization*, Educational Studies in Mathematics, 41, 209-238.

[8] Mitchelmore, M. C., & White, P. (2003): *Count Me In Too* and the *Basic Skills Test* in New South Wales. In Bragg, L., Campbell, C., Herbert, G., & Mousley, J. (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity* (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Geelong, pp. 515-522). Sydney: MERGA.

[9] Mitchelmore, M. and P.White (2004): *Abstraction in mathematics and mathematics learning*, In: S.Cockburn and E.Nardi (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 3, pp 329–336),

[10] White, P., & Mitchelmore, M. C. (2003): *Teaching angle by abstraction from physical activities with concrete materials*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 403-410). Honolulu, Hawai'i: Program Committee.